Funkcja Ackermanna

Paweł Pilarczyk

31 października 2003 r.

Streszczenie

W niniejszej notatce jest przedstawiony drobiazgowy dowód faktu, że funkcja Ackermanna nie jest prymitywnie rekurencyjna. Jest również pokazany zwodniczy lemat, na podstawie którego można natychmiast uzyskać powyższe twierdzenie, lecz samego lematu nie da się udowodnić przez indukcję, co jest również wykazane w niniejszej pracy.

Wstęp

Niniejsze opracowanie zawiera szczegółowy dowód następującego twierdzenia:

Twierdzenie 1 *Funkcja Ackermanna zadana wzorem*

$$\begin{aligned} A(0,y) &= 1, \\ A(1,0) &= 2, \\ A(x,0) &= x+2 \text{ dla } x \geqslant 2, \\ A(x+1,y+1) &= A\big(A(x,y+1),y\big). \end{aligned}$$

nie jest prymitywnie rekurencyjna.

Dowód ten jest uzupełnieniem do ćwiczeń do wykładu dra hab. Marka Zaionca pt. *Teoria programowania*, które autor miał przyjemność prowadzić w Instytucie Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego w roku akad. 2000/2001.

Dla kompletności wywodu poniżej jest podana pokrótce definicja klasy funkcji prymitywnie rekurencyjnych.

Definicja 2 *Klasa funkcji prymitywnie rekurencyjnych to najmniejsza klasa funkcji prowadzących z* $\mathbb{N}^n$ *dla pewnego* $n \in \mathbb{N}$ *w zbiór liczb naturalnych, która zawiera funkcje zerowe:* $z(x_1, \ldots, x_n) = 0$*, rzutowania:* $I_k^n(x_1, \ldots, x_n) = x_k$*, funkcję następnika:* $f(x) = x+1$ *oraz jest zamknięta ze względu na operację składania oraz schemat rekursji prostej (zob. też dowód Lematu 3).*

Ewentualny czytelnik niniejszej notatki powinien wiedzieć, że funkcja Ackeramanna jest funkcją rekursywną (oraz co to znaczy). Jest to zatem przykład funkcji, która jest rekursywna, ale nie prymitywnie rekurencyjna, co dowodzi, że klasa funkcji rekursywnych jest istotnie większa niż klasa funkcji prymitywnie rekurencyjnych.

Dowód Twierdzenia

Dowód Twierdzenia 1 jest oparty na następującym lemacie, który mówi, że funkcja Ackermanna rośnie szybciej niż dowolna funkcja prymitywnie rekurencyjna:

Lemat 3 *Dla dowolnej funkcji prymitywnie rekurencyjnej f istnieją takie stałe $n_f, x_f \in \mathbb{N}$, że*

$$\forall x \geqslant x_f \quad \max\{f(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \leqslant x\} < A(x, n_f).$$

Ponadto w dowodzie Twierdzenia 1 (oraz w innych dowodach) wykorzystuje się następującą prostą własność funkcji Ackermanna:

Własność 4 *Funkcja Ackermanna jest niemalejąca ze względu na pierwszą i ze względu na drugą zmienną.*

Korzystając z Lematu 3 oraz z Własności 4, które są wykazane dalej, można już udowodnić, że funkcja Ackermanna nie jest prymitywnie rekurencyjna.

Dowód Twierdzenia 1 Nie wprost. Gdyby funkcja Ackermanna A była prymitywnie rekurencyjna, to na mocy Lematu 3 istniałyby takie stałe n_A i x_A, że

$$\forall x \geqslant x_A \quad \max\{A(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \leqslant x\} < A(x, n_A).$$

Weźmy $x \geqslant \max\{x_A, n_A\}$. Wtedy z lewej strony wśród liczb branych do maksimum jest m.in. $A(x, x)$, które musiałoby być mniejsze od $A(x, n_A)$, a to przeczyłoby monotoniczności funkcji Ackermanna ze względu na drugą zmienną (zob. Własność 4). Dowód Twierdzenia 1 jest więc zakończony. □

Pozostałe dowody

Zanim przystąpimy do dalszych dowodów, wykażemy, że wartość funkcji Ackermanna jest zawsze silnie większa od jej pierwszego argumentu.

Obserwacja 5 *Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{N}$ mamy $A(x, y) \geqslant x + 1$.*

Dowód Obserwacji 5 Indukcyjnie ze względu na y. Dla $y = 0$ wprost z definicji funkcji Ackermanna mamy

$$A(x, y) = \begin{cases} x + 1, & \text{jeżeli } x = 0, 1, \\ x + 2 \geqslant x + 1, & \text{jeżeli } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Załóżmy teraz, że dowodzona nierówność jest prawdziwa dla pewnego $y \in \mathbb{N}$. Wykażemy, że jest tak również dla $y+1$. W tym celu zauważmy najpierw, że

$$A(x, y + 1) \geqslant A(0, y + 1) + x.$$

Rzeczywiście, dla $x = 0$ jest to trywialne, a w przypadku $x > 0$, korzystając ze wzoru na A i z założenia indukcyjnego, otrzymujemy

$$A(x, y + 1) = A\big(\underline{A(x - 1, y + 1)}, y\big) \geqslant A(x - 1, y + 1) + 1$$

i powtarzając ten proces „wyciągania jedynki z x na koniec" tak długo, aż x zostanie wyzerowane (tj. x razy), uzyskujemy

$$A(x, y + 1) \geqslant A(0, y + 1) + x = 1 + x,$$

co kończy indukcyjny dowód Obserwacji 5. □

Dowód Własności 4 Korzystając z definicji funkcji Ackermanna oraz z Obserwacji 5, otrzymujemy dla $y > 0$

$$A(x + 1, y) = A\big(\underline{A(x, y)}, y - 1\big) \geqslant A(x, y) + 1,$$

co oznacza po uwzględnieniu przypadku $y = 0$, który jest trywialny, że funkcja A jest niemalejąca ze względu na pierwszą zmienną.

Przejdźmy teraz do dowodu tego, że funkcja Ackermanna jest niemalejąca ze względu na drugą zmienną. Na mocy Obserwacji 5 mamy

$$A(x - 1, y + 1) \geqslant x - 1 + 1 = x.$$

Dzięki udowodnionej właśnie monotoniczności ze względu na pierwszą zmienną oraz przy powtórnym wykorzystaniu Obserwacji 5 możemy stąd uzyskać dla $x > 0$

$$A(x, y + 1) = A(\underbrace{A(x - 1, y + 1)}_{\geqslant x}, y) \geqslant A(x, y),$$

czyli żądaną monotoniczność ze względu na drugą zmienną (tutaj znowu przypadek $x = 0$ jest trywialny).

Dowód Własności 4 został niniejszym zakończony. □

Zanim przejdziemy do dowodu Lematu 3, udowodnimy następującą uwagę techniczną dającą oszacowanie na pewne szczególne zagnieżdżenie funkcji Ackermanna:

Uwaga 6 *Dla dowolnego* $x \geqslant 4$, $m \geqslant 0$ *oraz* $y \leqslant x$ *mamy*

$$A\big(A(\ldots(A(x, m+1\underbrace{), m), \ldots), m}_{y\ razy}\big) \leqslant A(x, m+2).$$

Dowód Uwagi 6 Rozpisując $A(x+y, m+1)$ z definicji funkcji Ackermanna tak długo, aż wewnątrz pierwszym argumentem będzie $x = x + y - y$ (tj. rozpisując y razy), otrzymujemy

$$\begin{aligned} A(x+y, m+1) &= A\big(A(x+y-1, m+1), m\big) = \ldots \\ \ldots &= A\big(A(\ldots(A(x, m+1\underbrace{), m), \ldots), m}_{y \text{ razy}}\big). \end{aligned} \tag{1}$$

Zauważmy teraz, że

$$2x \leqslant A(x-1, m+2). \tag{2}$$

Rzeczywiście, korzystając z monotoniczności funkcji Ackermanna ze względu na obie zmienne, uzyskujemy to niemal natychmiast:

$$\begin{aligned} A(x-1, m+2) &= A\big(A(x-2, \underbrace{m+2}_{\geqslant 0}), \underbrace{m+1}_{\geqslant 1}\big) \geqslant \\ &\geqslant A\big(\underbrace{A(x-2, 0)}_{= x, \text{ bo } x \geqslant 4}, 1) = A(x, 1) = 2x. \end{aligned}$$

Wykorzystując to, że funkcja Ackermanna jest niemalejąca ze względu na pierwszą zmienną, otrzymujemy w połączeniu z nierównością (2) następujące oszacowanie:

$$\begin{aligned} A(\underbrace{x+y}_{\leqslant 2x}, m+1) &\leqslant A(2x, m+1) \overset{\text{na mocy (2)}}{\leqslant} \\ &\leqslant A\big(A(x-1, m+2), m+1\big) = A(x, m+2), \end{aligned}$$

które po uwzględnieniu równości (1) kończy dowód Uwagi 6. □

Dowód Lematu 3 Indukcyjnie ze względu na strukturę funkcji f.

a) Dla funkcji stale równej zeru wystarczy wziąć $n_f = 0$, $x_f = 0$.

b) Dla rzutowania I_k^n dobre są stałe $n_f = 0$, $x_f = 0$.

c) Dla następnika ($f(x) = x + 1$) można wziąć $n_f = 0$, $x_f = 2$.

d) Jeżeli f jest złożeniem funkcji $h\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ i funkcji $f_1, \ldots, f_k\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, tzn.

$$f(x_1, \ldots, x_n) = h\big(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n)\big),$$

to można wziąć

$$\begin{aligned} x_f &= \max\{4, x_h, x_{f_1}, \ldots, x_{f_k}\}, \\ n_f &= \max\{n_{\max}+1, n_h+2\}, \end{aligned}$$

gdzie

$$n_{\max} = \max\{n_{f_1}, \ldots, n_{f_k}\}.$$

Rzeczywiście, dla $x \geqslant x_f$ mamy:

$$\max\{h\big(\underbrace{f_1(x_1,\ldots,x_n)}_{<A(x,n_{f_1})},\ldots,\underbrace{f_k(x_1,\ldots,x_n)}_{<A(x,n_{f_k})}\big) \mid x_1,\ldots,x_n \leqslant x\} \overset{\text{bo } n_{\max} \geqslant n_{f_i}}{\leqslant}$$

$$\leqslant \max\{h(x_1,\ldots,x_k) \mid x_1,\ldots,x_n \leqslant A(x,n_{\max})\} \overset{\text{bo } A(x,n_{\max}) \geqslant x_h}{<}$$

$$< A\big(A(x, \underbrace{n_{\max}}_{\leqslant n_f-1}), \underbrace{n_h}_{\leqslant n_f-2}\big) \leqslant A\big(A(x,n_f-1),n_f-2\big) \overset{\text{na podst. Uwagi 6}}{\leqslant} A(x,n_f).$$

e) Jeżeli f powstaje przy pomocy schematu rekursji prostej z funkcji g i h, tzn.

$$\begin{aligned} f(x_1,\ldots,x_n,0) &= g(x_1,\ldots,x_n), \\ f(x_1,\ldots,x_n,y+1) &= h\big(x_1,\ldots,x_n,y,f(x_1,\ldots,x_n,y)\big), \end{aligned}$$

to wtedy możemy obrać następujące stałe:

$$\begin{aligned} x_f &= \max\{4, x_g, x_h\}, \\ n_f &= \max\{n_g+1, n_h+2\}. \end{aligned}$$

Rozpocznijmy dowód od wypisania odpowiedniego oszacowania w przypadku $y=0$. Jeżeli $x \geqslant x_f$, to wtedy

$$\max\{f(x_1,\ldots,x_n,0) \mid x_1,\ldots,x_n,0 \leqslant x\} =$$

$$= \max\{g(x_1,\ldots,x_n) \mid x_1,\ldots,x_n \leqslant x\} < A(x,n_g) \overset{\text{bo } n_f \geqslant n_g}{\leqslant} A(x,n_f).$$

Przeanalizujmy jeszcze przypadek $y=1$. Dla $x \geqslant x_f$ odpowiednie oszacowanie wygląda następująco:

$$\max\{f(x_1,\ldots,x_n,1) \mid x_1,\ldots,x_n,1 \leqslant x\} =$$

$$= \max\{h\big(x_1,\ldots,x_n,0,\underbrace{f(x_1,\ldots,x_n,0)}_{<A(x,n_g)}\big) \mid x_1,\ldots,x_n \leqslant x\} \leqslant$$

$$\leqslant \max\{h(x_1,\ldots,x_n,y,z) \mid x_1,\ldots,x_n,y,z \leqslant A(x,n_g)\},$$

a ponieważ $A(x, n_g) \geqslant x+1 \geqslant x_f \geqslant x_h$, wyrażenie to możemy dalej szacować od góry przez

$$A\big(A(x, n_g), n_h\big) \overset{\text{z def. } n_f}{\leqslant} A\big(A(x, n_f - 1), n_f - 2\big) \overset{\text{na podst. Uwagi 6}}{\leqslant} A(x, n_f).$$

Rozważmy teraz przypadek ogólny — dla $y \geqslant 1$:

$$\max\{f(x_1, \ldots, x_n, y) \mid x_1, \ldots, x_n, y \leqslant x\} = \\ \max\{h\big(x_1, \ldots, x_n, y-1, f(x_1, \ldots, x_n, y-1)\big) \mid x_1, \ldots, x_n, y \leqslant x\}$$

i rozpisując w ten sposób całą rekursję, otrzymujemy

$$\max\{h\Big(x_1, \ldots, x_n, y-1, h\big(x_1, \ldots, x_n, y-2, h(\ldots)\big)\Big) \mid x_1, \ldots, x_n, y \leqslant x\}.$$

Tak uzyskane wyrażenie szacujemy „od wewnątrz":

$$g(x_1, \ldots, x_n) \leqslant A(x, n_g) \text{ dla } x \geqslant x_g,$$

a następnie

$$h\big(x_1, \ldots, x_n, 0, g(x_1, \ldots, x_n)\big) \leqslant A\big(A(x, n_g), n_h\big) \text{ dla } x \geqslant x_h \text{ oraz } x \geqslant x_g,$$

gdzie $A(x, n_g)$ jest oszacowaniem występujących tu argumentów funkcji h. Ogólnie, dla $x \geqslant x_f$ w kolejnym kroku tego szacowania otrzymujemy ograniczenie od góry wartości argumentów funkcji h w postaci

$$\alpha_j := A\big(A(\ldots A(A(x, n_g\underbrace{), n_h), \ldots), n_h}_{j \text{ razy}}\big)$$

i stąd wartości tej funkcji h są silnie mniejsze od

$$A(\alpha_j, n_h) = A\big(A(\ldots A(A(x, n_g\underbrace{), n_h), \ldots), n_h}_{j+1 \text{ razy}}\big).$$

Rozpisawszy w ten sposób do końca, otrzymujemy silne ograniczenie od góry wartości funkcji f na argumentach $x_1, \ldots, x_n, y \leqslant x$ przez

$$A\big(A(\ldots A(A(x, n_g\underbrace{), n_h), \ldots), n_h}_{y \text{ razy}}\big) \overset{\text{z def. } n_f}{\leqslant} \\ \leqslant A\big(A(\ldots A(A(x, n_f - 1\underbrace{), n_f - 2), \ldots), n_f - 2}_{y \text{ razy}}\big) \overset{\text{na podst. Uwagi 6}}{\leqslant} A(x, n_f),$$

co kończy dowód kroku indukcyjnego.

Tym samym dowód Lematu 3 został zakończony. □

Uwagi końcowe

Zauważmy jeszcze na zakończenie, że z Lematu 3 w sposób trywialny wynika poniższy wniosek, na podstawie którego z kolei można już udowodnić Twierdzenie 1 (dowód jest prawie identyczny jak przedstawiony powyżej).

Wniosek 7 *Dla dowolnej funkcji prymitywnie rekurencyjnej f istnieją takie stałe $n_f, x_f \in \mathbb{N}$, że*

$$\forall x \geqslant x_f \quad f(x, \ldots, x) < A(x, n_f).$$

Niestety, bezpośredni dowód tego wniosku (bez wykorzystania Lematu 3) może być trudny, o czym mówi poniższe spostrzeżenie.

Spostrzeżenie 8 *Wniosku 7 nie da się udowodnić przez indukcję ze względu na strukturę funkcji prymitywnie rekurencyjnej f.*

Dowód Spostrzeżenia 8 Weźmy następujące funkcje:

$$\begin{aligned} g(x) &= 0, \\ h_k(x, y, z) &= \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x = y = z, \\ A(x, k) + 1 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \end{aligned}$$

Zarówno każda z funkcji h_k, jak i funkcja g jest prymitywnie rekurencyjna (zob. Uzupełnienie 9 poniżej). Funkcje te spełniają ponadto Wniosek 7 ze stałymi

$$\begin{aligned} x_g = x_{h_k} = 0, \\ n_g = n_{h_k} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Niech teraz $f_k \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie funkcją powstającą z g i h_k przez rekursję prostą. Gdyby Wniosek 7 można było udowodnić przez indukcję ze względu na strukturę funkcji prymitywnie rekurencyjnej f_k, to oznaczałoby to, że istnieją pewne stałe $x_f, n_f \in \mathbb{N}$ (zależne od stałych wymienionych we wzorze (3), ale niezależne od liczby k) o tej własności, że funkcja f_k spełnia warunek

$$\forall x \geqslant x_f \quad f_k(x, x) < A(x, n_f).$$

Niestety, jest to nieprawdą, ponieważ dla $x > 0$ i dla $k = n_f$ mamy zgodnie ze schematem rekursji prostej

$$f_k(x, x) = h_k(x, x-1, f_k(x, x-1)) \overset{\text{z def. } h_k}{=} A(x, k) + 1 \overset{k = n_f}{>} A(x, n_f),$$

co kończy dowód Spostrzeżenia 8. □

Uzupełnienie 9 *Przy ustalonym $y \in \mathbb{N}$ funkcja*

$$f_y \colon \mathbb{N} \ni x \mapsto A(x, y) \in \mathbb{N}$$

jest prymitywnie rekurencyjna.

Dowód Uzupełnienia 9 Przez indukcję ze względu na y. Dla $y = 0$ teza jest trywialna. Załóżmy, że funkcja f_y jest prymitywnie rekurencyjna. Pokażemy, że przy tym założeniu funkcja f_{y+1} jest również prymitywnie rekurencyjna. Rzeczywiście, f_{y+1} jest wartością iteracji funkcji f_y na argumencie 1. Dokładniej, niech g będzie iteracją funkcji f_y zgodnie ze schematem:

$$\begin{aligned} g(z, 0) &= z, \\ g(z, x+1) &= f_y(g(z, x)). \end{aligned}$$

Wówczas

$$g(1, x) = \underbrace{f_y(\ldots(f_y(}_{x \text{ razy}} 1))\ldots) = \underbrace{A(A(\ldots(A(}_{x \text{ razy}} 1, y), y), \ldots), y) =$$
$$A(A(\ldots(\underbrace{A(A(0, y+1), y)}_{=A(1,y+1)}, y), \ldots), y) = \ldots = A(x, y+1),$$

co kończy dowód Uzupełnienia 9. □

Podziękowania

Autor chciałby w tym miejscu zamieścić szczególne podziękowania dla Pana Dra Hab. Marka Zaionca za wspaniale prowadzony wykład *Teoria programowania*, na który autor miał zaszczyt uczęszczać jako student informatyki, a później prowadzić do niego ćwiczenia już jako pracownik Instytutu Informatyki, oraz dla Pani Dr Małgorzaty Moczurad za inspirację do napisania niniejszej notatki oraz za wskazanie zwodniczego Wniosku 7, z którego wynika Twierdzenie 1, a którego nie da się udowodnić bezpośrednio w prosty sposób.